モノミアル・バーンサイド環の乗法的性質について (有限群のコホモロジー論とその周辺)

竹ケ原, 裕元

モノミアル・バーンサイド環の乗法的性質について

竹ヶ原　裕元

室蘭工業大学

有限群 G が 有限アーベル群 A の作用群 (operator group) である場合に, G から A への 1 コサイクルが関わる環として, G の単項表現 (monomial representation) の環と呼ばれるバーンサイド環の一般化 $\Omega(G, A)$ が Dress [7] によって導入された. この環はモノミアル・バーンサイド環とも呼ばれ, 様々な性質が調べられている ([1, 2, 3, 8, 9, 10] 参照). 本報告ではモノミアル・バーンサイド環のテンソル誘導に関する最近得られた結果を紹介する (§1–§4). バーンサイド環のテンソル誘導は加群のテンソル誘導と同様に定義される乗法的写像で ([4, §80C] 参照), Dress [6] や Yoshida [15] によりその性質が調べられた. モノミアル・バーンサイド環のテンソル誘導はバーンサイド環のテンソル誘導から自然に定義され, その性質から 1 コサイクルのテンソル誘導ともいえる概念が得られるが, G が $\mathbb{C}$ の位数 $|G|$ の巡回部分群に自明に作用する場合を考えれば, それは線形指標のテンソル誘導 ([4, §13A] 参照) である.

モノミアル・バーンサイド環は (G, A) 集合の圏のグロタンディック群に環構造を与えたものである. その解説の際, Dress [7] の取り扱いと少し違う方法で (G, A) 集合を定義するが, そのことに伴い, いくつかの結果について他文献にはない証明を添えておく. 本報告の主定理は, [12, 13] に記載した結果に基づいて最近得られた, 定理 3.9 である. その関連研究は現在も継続中であるが, 本報告の §5 では, モノミアル・バーンサイド環の環構造を研究する際に重要な役割を果たす基本定理 (定理 5.1) について解説する. また, 現在では様々なバーンサイド環の一般化が研究対象となっているので, 小田文仁氏, 吉田知行氏との最近の共同研究で導入した M バーンサイド環について §6 で解説する. モノミアル・バーンサイド環は M バーンサイド環の例である.

1　モノミアル・バーンサイド環の定義

有限群 G が有限アーベル群 A の作用群であるとする. $g \in G$ と $a \in A$ に対して, ${}^{g}a$ で g の a への作用を表す. 有限自由右 A 集合 Y が左 G 集合であって,

$$g(ya) = (gy)\,{}^{g}a, \quad {}^{\forall}g \in G,\ {}^{\forall}a \in A,\ {}^{\forall}y \in Y$$

が成り立つとき, Y を (G, A) 集合と呼ぶ. (G, A) 集合間の写像が (G, A) 集合の射であるとは, それが左 G 集合の射でありかつ右 A 集合の射であることをいう.

Y_1 と Y_2 を (G, A) 集合とする. 直積 $Y_1 \times Y_2$ への A の右作用を,

$$(y_1, y_2)a = (y_1 a^{-1}, y_2 a), \quad {}^{\forall}a \in A,\ {}^{\forall}(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$$

により定め, $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ を含む A 軌道を $y_1 \otimes y_2$ で表す. さらに,

$$Y_1 \otimes Y_2 := \{y_1 \otimes y_2 \mid (y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2\}$$

とおき, $Y_1 \otimes Y_2$ の (G, A) 集合としての構造を

$$g(y_1 \otimes y_2) = gy_1 \otimes gy_2, \quad {}^{\forall}g \in G, \ {}^{\forall}(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$$

および

$$(y_1 \otimes y_2)a = y_1 \otimes y_2 a, \quad {}^{\forall}a \in A, \ {}^{\forall}(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$$

により定める. この (G, A) 集合 を Y_1 と Y_2 のテンソル積という.

$\mathbf{F}(G, A)$ を (G, A) 集合の同型類上の自由アーベル群とする. (G, A) 集合 Y に対して, $\overline{Y}$ により Y を含む (G, A) 集合の同型類を表す. $\mathbf{F}(G, A)_0$ を (G, A) 集合 Y_1 と Y_2 に対して $\overline{Y_1 \dot{\cup} Y_2} - \overline{Y_1} - \overline{Y_2}$ で表される元全体で生成される $\mathbf{F}(G, A)$ の部分群とする. 任意の (G, A) 集合 Y_1 と Y_2 に対して

$$\overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} = \overline{Y_1 \otimes Y_2}$$

により $\mathbf{F}(G, A)$ の生成元上の乗法を定め, この乗法を $\mathbb{Z}$ 線形に拡張して $\mathbf{F}(G, A)$ の乗法を定める. $\mathbf{F}(G, A)$ は単位元をもつ可換環である. さらに, $\mathbf{F}(G, A)_0$ は $\mathbf{F}(G, A)$ のイデアルであり, 商環 $\mathbf{F}(G, A)/\mathbf{F}(G, A)_0$ が定まる.

定義 1.1 可換環 $\Omega(G, A)$ を $\Omega(G, A) = \mathbf{F}(G, A)/\mathbf{F}(G, A)_0$ により定め, A に関するモノミアル・バーンサイド環と呼ぶ ([1] 参照). この環は Dress [7] によって定義され, A に成分をもつ G の単項表現の環と呼ばれた.

各 (G, A) 集合 Y に対して, $[Y]$ により $\mathbf{F}(G, A)_0$ の $\mathbf{F}(G, A)$ における $\overline{Y}$ を含む剰余類 $\overline{Y} + \mathbf{F}(G, A)_0$ を表す. [7, Proposition 1(b)] (あるいは [12, Lemma 2.6]) より

$$[Y_1] = [Y_2] \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{Y_1} = \overline{Y_2}$$

が成り立つ. $\Omega(G, A)$ における乗法は, 任意の (G, A) 集合 Y_1 と Y_2 に対して

$$[Y_1] \cdot [Y_2] = [Y_1 \otimes Y_2]$$

により与えられ, この乗法に関する単位元は $[A]$ である. (A は (G, A) 集合である.)

2　1 コサイクルとモノミアル・バーンサイド環の $\mathbb{Z}$ 基底

$H \leq G$ とする. 作用の制限により, H は A の作用群である. 写像 $\sigma : H \to A$ が

$$\sigma(h_1 h_2) = \sigma(h_1) \cdot {}^{h_1}\sigma(h_2), \quad {}^{\forall}h_1, \, h_2 \in H$$

を満たすとき, σ を 1 コサイクルと呼ぶ. H から A への 1 コサイクル全体の集合を $Z^1(H,A)$ で表し, A の単位元を ϵ_A で表す. $1_H : H \to A,\ h \mapsto \epsilon_A$ は 1 コサイクルである. $Z^1(H,A)$ における乗法を

$$\sigma \cdot \tau(h) = \sigma(h) \cdot \tau(h), \quad {}^\forall\sigma,\, \tau \in Z^1(H,A),\ {}^\forall h \in H$$

により定める. $Z^1(H,A)$ は 1_H を単位元とするアーベル群である.

定義 2.1 ([12]) $H \le G$ とし, G/H の完全代表系 $\{g_1,\, g_2,\ldots,\, g_n\}$ を固定する. 各 $\sigma \in Z^1(H,A)$ に対して (G,A) 集合 $(G/H)_\sigma$ を集合の直積 $A \times (G/H)$ 上に

$$g(a, g_jH) = ({}^{g_{j'}}\sigma(g_{j'}^{-1}gg_j)\,{}^g a, g_{j'}H), \quad {}^\forall g \in G,\ {}^\forall a \in A,\ {}^\forall j \in [n] := \{1,\, 2,\ldots,\, n\},$$

ここで $gg_jH = g_{j'}H$, および

$$(a, g_jH)b = (ab, g_jH), \quad {}^\forall a,\, b \in A,\ {}^\forall j \in [n]$$

により G の左作用と A の右作用が与えられているものとして定める.

補題 2.2 定義 2.1 の記号のもとで, G/H の完全代表系を $\{g_1h_1,\, g_2h_2,\ldots,\, g_nh_n\}$, $h_1,\, h_2,\ldots,\, h_n \in H$, に変えて定義される (G,A) 集合を $(G/H)'_\sigma$ で表す. このとき

$$(G/H)_\sigma \simeq (G/H)'_\sigma$$

が成り立つ.

証明　右 A 集合の同型 $f : (G/H)_\sigma \mapsto (G/H)'_\sigma$ を

$$(\epsilon_A, g_jH) \mapsto ({}^{g_j}\sigma(h_j)^{-1}, g_jH), \quad {}^\forall j \in [n]$$

により定める. 任意の $g \in G$ および $j \in [n]$ に対して

$$\begin{aligned}
gf((\epsilon_A, g_jH)) &= g({}^{g_j}\sigma(h_j)^{-1}, g_jH) \\
&= ({}^{g_{j'}h_{j'}}\sigma(h_{j'}^{-1}g_{j'}^{-1}gg_jh_j)\,{}^{gg_j}\sigma(h_j)^{-1}, g_{j'}H) \\
&= ({}^{g_{j'}h_{j'}}\sigma(h_{j'}^{-1})\,{}^{g_{j'}}\sigma(g_{j'}^{-1}gg_jh_j)\,{}^{gg_j}\sigma(h_j)^{-1}, g_{j'}H) \\
&= ({}^{g_{j'}}\sigma(h_{j'})^{-1}\,{}^{g_{j'}}\sigma(g_{j'}^{-1}gg_j), g_{j'}H) \\
&= f({}^{g_{j'}}\sigma(g_{j'}^{-1}gg_j), g_{j'}H) \\
&= f(g(\epsilon_A, g_jH)),
\end{aligned}$$

ここで $gg_jH = g_{j'}H$, を得る. よって f は (G,A) 集合の同型である. □

$H \le G$ とする. 任意の $\sigma \in Z^1(H,A)$ に対して $\sigma^a \in Z^1(H,A)$, $a \in A$ を

$$\sigma^a(h) = a^{-1}\sigma(h)\,{}^h a, \quad {}^\forall h \in H$$

により定め, $Z^1(H,A)$ を右 A 集合とみる. さらに $Z^1(H,A)$ における A 軌道の完全代表系を $H^1(H,A)$ で表す. また, 任意の $\sigma \in Z^1(H,A)$ に対して, σ を含む A 軌道を代表する $H^1(H,A)$ の元を $\overline{\sigma}$ で表すことにする. 次に, 任意の $\sigma \in Z^1(H,A)$ に対して 1 コサイクル $g\sigma \in Z^1(gHg^{-1},A)$, $g \in G$ を

$$(g\sigma)(ghg^{-1}) = {}^{g}\sigma(h), \quad {}^{\forall}h \in H$$

により定める. 定義から

$$h\sigma = \sigma^{\sigma(h)}, \quad {}^{\forall}h \in H, \ {}^{\forall}\sigma \in Z^1(H,A)$$

および

$$g(\sigma^a) = (g\sigma)^{\,{}^{g}a}, \quad {}^{\forall}g \in G, \ {}^{\forall}a \in A, \ {}^{\forall}\sigma \in Z^1(H,A)$$

となる. このとき集合 $\mathcal{H}(G,A) := \{(H,\sigma) \mid H \leq G, \sigma \in H^1(H,A)\}$ 上の左 G 作用を

$$g(H,\sigma) = (gHg^{-1}, \overline{g\sigma}), \quad {}^{\forall}g \in G, \ {}^{\forall}(H,\sigma) \in \mathcal{H}(G,A)$$

により定め, G 軌道の完全代表系を $\mathcal{R}(G,A)$ で表す. また, 非共役な G の部分群の完全代表系 $\mathrm{C}(G)$ を, $(H,\sigma) \in \mathcal{R}(G,A)$ ならば $H \in \mathrm{C}(G)$ であるように固定する.

補題 2.3 任意の $(H,\sigma) \in \mathcal{S}(G,A)$, $g \in G$, $a \in A$ について

$$(G/H)_\sigma \simeq (G/\,{}^{g}H)_{(g\sigma)^a},$$

ここで ${}^{g}H = gHg^{-1}$, が成り立つ.

証明　定義 2.1 の記号のもとで, $G/\,{}^{g}H$ の完全代表系が $\{g_1g^{-1}, g_2g^{-1}, \ldots, g_ng^{-1}\}$ であるとして証明する (補題 2.2 参照). 右 A 集合の同型 $f : (G/H)_\sigma \to (G/\,{}^{g}H)_{(g\sigma)^a}$, を

$$(\epsilon_A, g_iH) \mapsto ({}^{g_ig^{-1}}a^{-1}, g_ig^{-1}\,{}^{g}H), \quad {}^{\forall}i \in [n]$$

により定める. 任意の $r \in G$ および $i \in [n]$ に対して

$$\begin{aligned}
rf((\epsilon_A, g_iH)) &= r({}^{g_ig^{-1}}a^{-1}, g_ig^{-1}\,{}^{g}H) \\
&= ({}^{g_{i'}g^{-1}}(g\sigma)^a(gg_{i'}^{-1}rg_ig^{-1})\,{}^{rg_ig^{-1}}a^{-1}, g_{i'}g^{-1}\,{}^{g}H) \\
&= ({}^{g_{i'}g^{-1}}a^{-1}\,{}^{g_{i'}g^{-1}}(g\sigma)(gg_{i'}^{-1}rg_ig^{-1}), g_{i'}g^{-1}\,{}^{g}H) \\
&= ({}^{g_{i'}g^{-1}}a^{-1}\,{}^{g_{i'}}\sigma(g_{i'}^{-1}rg_i), g_{i'}g^{-1}\,{}^{g}H) \\
&= f(({}^{g_{i'}}\sigma(g_{i'}^{-1}rg_i), g_{i'}H)) \\
&= f(r(\epsilon_A, g_iH)),
\end{aligned}$$

ここで $rg_iH = g_{i'}H$, を得る. よって f は (G,A) 集合の同型である. □

Y を (G,A) 集合とし, Y における A 軌道の集合を Y/A で表す. $y \in Y$ を含む Y/A の元を yA と表す. G は Y/A 上に

$$g(yA) = (gy)A, \quad {}^\forall g \in G,\ {}^\forall y \in Y$$

により作用する. Y/A が可移な左 G 集合であるとき, Y を単純 (G,A) 集合という. 任意の (G,A) 集合は単純 (G,A) 集合の交わりをもたない和として一意的に表される.

$y \in Y$ とし, $G_{yA} = \{g \in G \mid gy = ya,\ {}^\exists a \in A\}$ とする. (すなわち G_{yA} は Y/A の元 yA の G における固定部分群である.) このとき

$$gy = y\sigma_y(g), \quad {}^\forall g \in G_{yA}$$

で定まる写像 $\sigma_y : G_{yA} \to A$ は 1 コサイクルである. また, 任意の $a \in A$ に対して, $G_{(ya)A} = G_{yA}$ かつ $\sigma_{ya} = \sigma_y^a$ である. 以後,

$$\mathcal{S}(G,A) = \{(H,\sigma) \mid H \leq G,\ \sigma \in Z^1(H,A)\}$$

とおく. 次の命題は [7, Proposition 1(b)] で本質的に述べられている.

命題 2.4 ([12]) Y を (G,A) 集合とし, 左 G 集合 Y/A が可移であるとする. 任意の $y \in Y$ に対して Y は $(G/G_{yA})_{\sigma_y}$ と同型である. さらに, Y が $(G/H)_\sigma$ と同型である $(H,\sigma) \in \mathcal{R}(G,A)$ がただ 1 つ存在する. また, $(U,\tau) \in \mathcal{S}(G,A)$ に対して Y が $(G/U)_\tau$ と同型ならば, $(H,\sigma) = r(U,\tau^a)$ となる $r \in G$ と $a \in A$ が存在する.

証明　$y \in Y$ とし, $H = G_{yA}$, $\sigma = \sigma_y$ とおく. Y/A は左 G 集合として G/H に同型である. $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ を G/H の完全代表系とし, $f : Y \to (G/H)_\sigma$ を

$$(gy)a \mapsto (g(\epsilon_A, H))a = ({}^{g_i}\sigma(g_i^{-1}g)a, g_iH), \quad {}^\forall g \in G,\ {}^\forall a \in A,\ {}^\forall y \in Y,$$

ここで $gH = g_iH$, により定める. 任意の $g \in G$, $a \in A$, および $r \in G$ に対して

$$\begin{aligned} f(r((gy)a)) &= f(((rg)y)\,{}^r a) \\ &= ({}^{g_{i'}}\sigma(g_{i'}^{-1}(rg))\,{}^r a, g_{i'}H) \\ &= ({}^{g_{i'}}\sigma(g_{i'}^{-1}rg_i)\,{}^{rg_i}\sigma(g_i^{-1}g)\,{}^r a, g_{i'}H) \\ &= r({}^{g_i}\sigma(g_i^{-1}g)a, g_iH) \\ &= rf((gy)a), \end{aligned}$$

ここで $rgH = g_{i'}H$, となる. よって $Y \simeq (G/H)_\sigma$ が成り立つ. 補題 2.3 より $Y \simeq (G/H)_{\overline{\sigma}}$ である. ここで $\mathcal{H}(G,A)$ における $(H,\overline{\sigma})$ を含む G 軌道の代表を, あらためて $(H,\sigma) \in \mathcal{R}(G,A)$ とすれば, 補題 2.3 より, やはり $Y \simeq (G/H)_\sigma$ が成り立つ. 次に, 同型 $f : Y \to (G/U)_\tau$, $(U,\tau) \in \mathcal{R}(G,A)$ があるとし, $b \in A$ と $r \in G$ について

$$f(y) = (b, rU) \in A \times (G/U)$$

であるとする. また, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ を G/U の完全代表系とし, $ru = g_i$, $u \in U$ とする. このとき, 任意の $h \in H$ に対して, $hy = y\sigma(h)$ より

$$(b, rU)\sigma(h) = f(y)\sigma(h) = f(y\sigma(h)) = f(hy) = hf(y) = h(b, rU)$$

となり, さらに $hrU = g_{i'}U$ とすれば

$$(b\sigma(h), rU) = ({}^{g_{i'}}\tau(g_{i'}^{-1}hg_i)\,{}^{h}b, hrU)$$

が成り立つ. よって, 任意の $h \in H$ に対して, $h \in {}^{r}U$, $hrU = g_iU$, および

$$\begin{aligned}\sigma(h) &= b^{-1}\,{}^{g_i}\tau(g_i^{-1}hg_i)\,{}^{h}b \\ &= b^{-1}\,{}^{ru}\tau(u^{-1}(r^{-1}hr)u)\,{}^{h}b \\ &= b^{-1}\,{}^{ru}\tau(u^{-1})\,{}^{r}\tau(r^{-1}hr)\,{}^{hr}\tau(u)\,{}^{h}b \\ &= ({}^{r}\tau(u)b)^{-1}\,{}^{r}\tau(r^{-1}hr)\,{}^{h}({}^{r}\tau(u)b) \\ &= (r\tau)^{{}^{r}\tau(u)b}(h)\end{aligned}$$

を得る. したがって, $G/H \simeq Y/A \simeq G/U$ より, $H = {}^{r}U$ かつ $\sigma = (r\tau)^{{}^{r}\tau(u)b}$ となる. すなわち $r(U,\tau) = ({}^{r}U, \overline{r\tau}) = (H,\sigma) \in \mathcal{R}(G,A)$ であり, $(H,\sigma) = (U,\tau)$ が成り立つ.
□

次の命題は [7, Proposition 1(a)] で本質的に述べられている.

命題 2.5 ([12]) $\{[(G/H)_\sigma] \mid (H,\sigma) \in \mathcal{R}(G,A)\}$ は $\Omega(G,A)$ の $\mathbb{Z}$ 基底をなす.

定義 2.6 $K \le H \le G$ とする. (H,A) 集合 T に対して, $\mathrm{res}^H_K(T)$ は (H,A) 集合 T の左 H 作用を K に制限して得られる (K,A) 集合を表す. また, $\sigma \in Z^1(H,A)$ に対して, $\sigma|_K : K \to A$ は σ の H から K への制限を表す.

補題 2.7 ([12]) $H \le G$ とする. 任意の $(U,\tau) \in \mathcal{S}(G,A)$ に対して

$$\mathrm{res}^G_H((G/U)_\tau) \simeq \dot{\bigcup_{HgU \in H\backslash G/U}} (H/(H \cap {}^{g}U))_{(g\tau)|_{H\cap {}^{g}U}}$$

が成り立つ.

補題 2.8 ([13]) $(H,\sigma), (U,\tau) \in \mathcal{S}(G,A)$ に対して

$$(G/H)_\sigma \otimes (G/U)_\tau \simeq \dot{\bigcup_{HgU \in H\backslash G/U}} (G/(H \cap {}^{g}U))_{\sigma\cdot(g\tau)}$$

が成り立つ. ただし $\sigma \cdot (g\tau) : H \cap {}^{g}U \to A$ は $\sigma|_{H\cap {}^{g}U}$ と $(g\tau)|_{H\cap {}^{g}U}$ の積を表す.

定義 2.9 $H \leq G$ とする. 各 (H, A) 集合 T を単純 (H, A) 集合の和として

$$T = \dot{\bigcup_{i=1,2,\ldots,m}} (H/U_i)_{\tau_i}, \quad (U_i, \tau_i) \in \mathcal{S}(H, A)$$

と表すとき, T の G への誘導および共役を, それぞれ

$$\mathrm{ind}_H^G(T) := \dot{\bigcup_{i=1,2,\ldots,m}} (G/U_i)_{\tau_i},$$
$$\mathrm{con}_H^g(T) := \dot{\bigcup_{i=1,2,\ldots,m}} ({}^gH/{}^gU_i)_{g\tau_i}, \quad {}^\forall g \in G$$

により定める. ここで定義した $\mathrm{con}_H^g(T)$ を ${}^gT$ とも表す. また, $K \leq H$ のとき (K, A) 集合の H への誘導も同様に定義される.

命題 2.10 ([13]) $\mathbb{Z}$ 代数の族 $\Omega(H, A)$, $H \leq G$ は定義 2.6, 2.9 で定めた res, ind, con を備えた Green 関手である. すなわち, 任意の $U \leq H \leq G$, $L \leq K \leq H$, $g, r \in G$, $h \in H$, $x \in X(H)$, および $y \in X(K)$ に対して,

(G.1) $\mathrm{con}_{{}^rH}^g \circ \mathrm{con}_H^r = \mathrm{con}_H^{gr}, \quad \mathrm{con}_H^h = \mathrm{id}_{X(H)},$

(G.2) $\mathrm{res}_L^K \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_L^H, \quad \mathrm{res}_H^H = \mathrm{id}_{X(H)},$

(G.3) $\mathrm{con}_K^g \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_{{}^gK}^{{}^gH} \circ \mathrm{con}_H^g,$

(G.4) $\mathrm{ind}_K^H \circ \mathrm{ind}_L^K = \mathrm{ind}_L^H, \quad \mathrm{ind}_H^H = \mathrm{id}_{X(H)},$

(G.5) $\mathrm{con}_H^g \circ \mathrm{ind}_K^H = \mathrm{ind}_{{}^gK}^{{}^gH} \circ \mathrm{con}_K^g,$

(G.6) (マッキー公理)
$$\mathrm{res}_K^H \circ \mathrm{ind}_U^H = \sum_{KhU \in K\backslash H/U} \mathrm{ind}_{K\cap {}^hU}^K \circ \mathrm{res}_{K\cap {}^hU}^{{}^hU} \circ \mathrm{con}_U^h,$$

(G.7) (フロベニウス公理)
$$x \cdot \mathrm{ind}_K^H(y) = \mathrm{ind}_K^H(\mathrm{res}_K^H(x) \cdot y), \quad \mathrm{ind}_K^H(y) \cdot x = \mathrm{ind}_K^H(y \cdot \mathrm{res}_K^H(x))$$

が成り立つ.

有限群の指標環に関して, 以下の結果がある ([3, 3.1], [13, Remark 4.8] 参照).

補題 2.11 A は $\mathbb{C}$ の有限巡回部分群で, 位数が $|G|$ であるとする. さらに, G は A 上に自明に作用するとする. 各 $H \leq G$ に対して, $R(H)$ で H の指標環を表し, 加法的写像 $\Theta_H : \Omega(H, A) \to R(H)$ を

$$\Theta_H([(H/K)_\nu]) = \mathrm{ind}_K^H(\nu), \quad {}^\forall(K, \nu) \in \mathcal{R}(H, A)$$

により定義する. ここで $\mathrm{ind}_K^H(\nu)$ は ν からの誘導指標を表す. このとき, 加法的写像の族 $\{\Theta_H\}_{H \leq G}$ は Green 関手の射である.

命題 2.12 ([2, 3]) 補題 2.11 の条件のもとで, 各 $H \leq G$ に対して, 加法的写像 $\Psi_H : R(H) \to \Omega(H, A)$ が存在して $\Theta_H \circ \Psi_H = \mathrm{id}_{R(H)}$ が成り立つ.

3 テンソル誘導

$H \leq G$ とし, T を 左 H 集合とする. 集合 $\mathrm{Map}_H(G,T)$ を

$$\mathrm{Map}_H(G,T) = \{f : G \to T \mid f(hg) = hf(g),\ {}^\forall h \in H,\ {}^\forall g \in G\}$$

と定義する ([6, §4], [15, §3(a.3)] 参照). $\mathrm{Map}_H(G,T)$ は G の作用が

$$(gf)(r) = f(rg), \quad {}^\forall g,\, r \in G,\ {}^\forall f \in \mathrm{Map}_H(G,T)$$

により与えられる左 G 集合である. $\mathrm{Map}_H(G,T)$ を左 H 集合 T からテンソル誘導された左 G 集合という. [4, §80C] で定義されている T からテンソル誘導された左 G 集合 $T^{\otimes G}$ は $\mathrm{Map}_H(G,T)$ と同型であり, 左 G 集合の同型 $f : T^{\otimes G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Map}_H(G,T)$ は

$$f((t_1,\ldots,t_n))(hg_j^{-1}) = ht_j, \quad {}^\forall(t_1,\ldots,t_n) \in T^{\otimes G} = \underbrace{T \times \cdots \times T}_{n},\ {}^\forall h \in H,\ {}^\forall j \in [n]$$

により与えられる. 実際, 任意の $g \in G$, $(t_1,\ldots,t_n) \in T^{\otimes G}$, $h \in H$, $j \in [n]$ に対して

$$\begin{aligned}
(gf((t_1,\ldots,t_n)))(hg_j^{-1}) &= f((t_1,\ldots,t_n))(hg_j^{-1}g) \\
&= f((t_1,\ldots,t_n))(h(g_j^{-1}gg_{j'})g_{j'}^{-1}) \\
&= (h(g_j^{-1}gg_{j'}))t_{j'} \\
&= f(g(t_1,\ldots,t_n))(hg_j^{-1}),
\end{aligned}$$

ここで $g_jH = gg_{j'}H$, が成り立つ ([4, (80.36)] 参照). また, 左 H 集合 T_1, T_2 に対して

$$\mathrm{Map}_H(G, T_1 \times T_2) \simeq \mathrm{Map}_H(G,T_1) \times \mathrm{Map}_H(G,T_2)$$

が成り立つ ([4, (80.38) Proposition (i)] 参照).

注意 3.1 上記の記号のもとで, [4, §13A] で定義された加群のテンソル誘導 $(\mathbb{Z}T)^{\otimes G}$ について $\mathbb{Z}(T^{\otimes G}) \simeq (\mathbb{Z}T)^{\otimes G}$ が成り立つ ([4, (80.38) Proposition (ii)] 参照).

定義 3.2 ([13]) $H \leq G$ とし, T を (H, A) 集合とする. $Hg \neq Hr$ である $g,\, r \in G$ および $a \in A$ に対して, $\mathrm{Map}_H(G,T)$ における関係 $\sim_{(g,r,a)}$ を

$$f \sim_{(g,r,a)} f' \ :\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\text{(i) } f(hg)\,{}^{hg}a = f'(hg), \quad f(hr) = f'(hr)\,{}^{hr}a, \quad {}^\forall h \in H, \\ &\text{(ii) } f(g') = f'(g'), \quad {}^\forall g' \in G - Hg\dot{\cup}Hr \end{aligned}$$

により定める. 各 $g,\, r \in G$, $a \in A$ に対する $\sim_{(g,r,a)}$ で生成される $\mathrm{Map}_H(G,T)$ における同値関係を $\sim_A$ で表す. $\widehat{f}$ で $f \in \mathrm{Map}_H(G,T)$ を含む $\sim_A$ に関する同値類を表す.

定義 3.3 ([13]) $H \leq G$ とする．(H, A) 集合 T に対して

$$\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T) = \{\widehat{f} \mid f \in \mathrm{Map}_H(G, T)\}$$

とおき，$\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T)$ 上の右 A 作用および左 G 作用を

$$\widehat{f}a = \widehat{f_a}, \text{ ただし } f_a(r) = \begin{cases} f(r)\,{}^r a, & r \in H \text{ のとき}, \\ f(r), & r \in G - H \text{ のとき}, \end{cases} \quad {}^\forall f \in \widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T), {}^\forall a \in A$$

および

$$g\widehat{f} = \widehat{gf}, \quad {}^\forall g \in G, \ {}^\forall f \in \widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T)$$

により定める．$\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T)$ を T からのテンソル誘導という．

定義 3.3 の記号のもとで，$\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T)$ 上の右 A 作用と左 G 作用の定義より

$$g(\widehat{f}a) = \widehat{gf_a} = \widehat{gf}\,{}^g a = (g\widehat{f})\,{}^g a, \quad {}^\forall g \in G, \ {}^\forall a \in A, \ {}^\forall f \in \widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T)$$

が成り立つから，$\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T)$ は (G, A) 集合である ([13, Lemma 3.4] 参照).

以後，G の単位元を ϵ で表し，(H, A) 集合からのテンソル誘導の性質を述べる．

補題 3.4 ([13]) $H \leq G$ とし，$\{g_1 = \epsilon, g_2, \ldots, g_n\}$ を G/H の完全代表系とする．T を (H, A) 集合とし，$f \in \mathrm{Map}_H(G, T)$ とする．$f^{(0)} \in \mathrm{Map}_H(G, T)$ が任意の $h \in H$ および $j \in [n]$ に対して $f^{(0)}(hg_j^{-1}) = f(hg_j^{-1})\,{}^h a_j$, $a_j \in A$ を満たすとき，$f^{(0)} \sim_A f_a$, ここで $a = {}^{g_1}a_1\,{}^{g_2}a_2 \cdots {}^{g_n}a_n$, が成り立ち，$\widehat{f^{(0)}} = \widehat{f}a$ となっている．

補題 3.5 ([13]) $H \leq G$ とする．任意の (H, A) 集合 T_1, T_2 に対して

$$\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T_1 \otimes T_2) \simeq \widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T_1) \otimes \widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T_2)$$

が成り立つ．

命題 3.6 ([13]) $H, K \leq G$ とする．任意の (H, A) 集合 T に対して

$$\mathrm{res}^G_K(\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T)) \simeq \bigotimes_{KgH \in K\backslash G/H} \widehat{\mathrm{Map}}_{K \cap {}^gH}(K, \mathrm{res}^{{}^gH}_{K \cap {}^gH}({}^gT))$$

が成り立つ．

命題 3.7 $H \leq G$, $(U, \tau) \in \mathcal{S}(H, A)$, $f \in \mathrm{Map}_H(G, (H/U)_\tau)$ とする．G/H の完全代表系を $\{g_1 = \epsilon, g_2, \ldots, g_n\}$, H/U の完全代表系を $\{h_1 = \epsilon, h_2, \ldots, h_m\}$ とするとき，

$$f(g_j^{-1}) = (a_j, h_{i_j}U) \in A \times (H/U), \quad {}^\forall j \in [n]$$

となっているならば,

$$h_{i_j}^{-1}(g_j^{-1}gg_{j'})h_{i_{j'}} \in U, \quad {}^{\forall}j \in [n],\ {}^{\forall}g \in G_{\widehat{f}A} = \{g \in G \mid g\widehat{f} = \widehat{f}a,\ {}^{\exists}a \in A\},$$

ここで $g_jH = gg_{j'}H$, が成り立ち,

$$g\widehat{f} = \widehat{f}\sigma_{\widehat{f}}(g), \quad {}^{\forall}g \in G_{\widehat{f}A}$$

を満たす $\sigma_{\widehat{f}} \in Z^1(G_{\widehat{f}A}, A)$ は

$$\sigma_{\widehat{f}}^{a}(g) = \prod_{j=1}^{n} {}^{g_jh_{i_j}}\tau(h_{i_j}^{-1}(g_j^{-1}gg_{j'})h_{i_{j'}}), \quad {}^{\forall}g \in G_{\widehat{f}A}, \tag{I}$$

ここで $a = {}^{g_1}a_1^{-1}\,{}^{g_2}a_2^{-1}\cdots{}^{g_n}a_n^{-1}$, により与えられる.

証明　$g \in G$, $j \in [n]$ とし, $(g_j^{-1}gg_{j'})h_{i_{j'}}U = h_{j_*}U$ とすれば

$$\begin{aligned}(gf)(g_j^{-1}) &= f(g_j^{-1}g)\\ &= f((g_j^{-1}gg_{j'})g_{j'}^{-1})\\ &= (g_j^{-1}gg_{j'})f(g_{j'}^{-1})\\ &= ({}^{h_{j*}}\tau(h_{j_*}^{-1}(g_j^{-1}gg_{j'})h_{i_{j'}})\,{}^{g_j^{-1}gg_{j'}}a_{j'}, h_{j_*}U)\end{aligned}$$

が成り立つ. さらに $g \in G_{\widehat{f}A}$ ならば $h_{j_*} = h_{i_j}$, $h_{i_j}^{-1}(g_j^{-1}gg_{j'})h_{i_{j'}} \in U$ であって,

$$\begin{aligned}(gf)(g_j^{-1}) &= ({}^{h_{i_j}}\tau(h_{i_j}^{-1}(g_j^{-1}gg_{j'})h_{i_{j'}})\,{}^{g_j^{-1}gg_{j'}}a_{j'}, h_{i_j}U)\\ &= (a_j, h_{i_j}U)a_j^{-1}\,{}^{h_{i_j}}(\tau(h_{i_j}^{-1}(g_j^{-1}gg_{j'})h_{i_{j'}}))\,{}^{g_j^{-1}gg_{j'}}a_{j'}\end{aligned}$$

となる. したがって, 補題 3.4 より

$$g\widehat{f} = \widehat{f}a\left(\prod_{j=1}^{n} {}^{g_jh_{i_j}}\tau(h_{i_j}^{-1}(g_j^{-1}gg_{j'})h_{i_{j'}})\right){}^{g}a^{-1}$$

を得る. よって, 式 (I) が成り立つ. □

系 3.8 ([13]) $(H, \sigma) \in \mathcal{S}(G, A)$ に対して, $\{g_1 = \epsilon, g_2, \ldots, g_n\}$ を G/H の完全代表系とし, $\sigma^{\otimes G} \in Z^1(G, A)$ を

$$\sigma^{\otimes G} = \prod_{j=1}^{n} {}^{g_j}\tau(g_j^{-1}gg_{j'}), \quad {}^{\forall}g \in G,$$

ここで $g_jH = gg_{j'}H$, により定める. このとき

$$\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, (H/H)_\sigma) \simeq (G/G)_{\sigma^{\otimes G}}$$

が成り立つ.

証明　$f \in \mathrm{Map}_H(G, (H/H)_\sigma)$ は $f(hg_j^{-1}) = (\sigma(h), H)$, ${}^\forall h \in H$, ${}^\forall j \in [n]$ を満たすとする．このとき, 補題 3.4 より $\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, (H/H)_\sigma) = \widehat{f}A$ であり, $G = G_{\widehat{f}A}$ が成り立つ．また, 命題 3.7 より $\overline{\sigma_{\widehat{f}}} = \overline{\sigma^{\otimes G}}$ である．したがって, 補題 2.3 より, 主張を得る．□

定理 3.9 $H \le G$, T を (H, A) 集合とし, T は単純 (H, A) 集合の和として

$$T = \dot{\bigcup_{k=1,2,\dots,s}} (H/U_k)_{\tau_k}, \quad (U_k, \tau_k) \in \mathcal{S}(H, A)$$

と表されるとする．左 G 集合 $\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T)/A$ の G 軌道の完全代表系を $\widehat{f}_1 A$, $\widehat{f}_2 A, \dots,$ $\widehat{f}_t A$, G/H の完全代表系 を $\{g_1 = \epsilon, g_2, \dots, g_n\}$, $k = 1, 2, \dots, s$ に対して H/U_k の完全代表系を $\{h_1^{(k)} = \epsilon, h_2^{(k)}, \dots, h_{m_k}^{(k)}\}$ とし, $\ell = 1, 2, \dots, t$ について,

$$f_\ell(g_j^{-1}) = (a_{\ell j}, h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})} U_{k_{\ell j}}) \in A \times (H/U_{k_{\ell j}}), \quad {}^\forall j \in [n]$$

となっているとする．このとき, $\ell = 1, 2, \dots, t$ について, $\sigma_\ell \in Z^1(G_{\widehat{f}_\ell A}, A)$ で

$$\sigma_\ell(g) = \prod_{j=1}^{n} {}^{g_j h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})}} \tau_{k_{\ell j}}(h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})-1}(g_j^{-1} g g_{j'}) h_{i_{\ell j'}}^{(k_{\ell j})}), \quad {}^\forall g \in G_{\widehat{f}_\ell A},$$

ここで $g_j H = g g_{j'} H$, を満たすものが存在し,

$$\widehat{\mathrm{Map}}_H(G, T) \simeq \dot{\bigcup_{\ell=1,2,\dots,t}} (G/G_{\widehat{f}_\ell A})_{\sigma_\ell}$$

が成り立つ．

証明　$\ell = 1, 2, \dots, t$ および $j = 1, 2, \dots, n$ について, $g \in G_{\widehat{f}_\ell A}$ ならば,

$$(gf_\ell)(g_j^{-1}) = f((g_j^{-1} g g_{j'}) g_{j'}^{-1}) = (g_j^{-1} g g_{j'})(a_{\ell j'}, h_{i_{\ell j'}}^{(k_{\ell j'})} U_{k_{\ell j'}}),$$

ここで $g_j H = g g_{j'} H$, より, $k_{\ell j} = k_{\ell j'}$, $h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})} U_{k_{\ell j}} = (g_j^{-1} g g_{j'}) h_{i_{\ell j'}}^{(k_{\ell j})} U_{k_{\ell j}}$, および

$$(gf_\ell)(g_j^{-1}) = (a_{\ell j}, h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})} U_{k_{\ell j}}) a_{\ell j}^{-1} \, {}^{h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})}} \tau_{k_{\ell j}}(h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})-1}(g_j^{-1} g g_{j'}) h_{i_{\ell j'}}^{(k_{\ell j})}) \, {}^{g_j^{-1} g g_{j'}} a_{\ell j'}$$

が命題 3.7 の証明と同様に得られる．よって, $\ell = 1, 2, \dots, t$ について, 補題 3.4 より

$$g\widehat{f_\ell} = \widehat{f}_\ell \sigma_{\widehat{f}_\ell}(g), \quad {}^\forall g \in G_{\widehat{f}_\ell A}$$

を満たす $\sigma_{\widehat{f}_\ell} \in Z^1(G_{\widehat{f}_\ell A}, A)$ が

$$\sigma_{\widehat{f}_\ell}^a(g) = \prod_{j=1}^{n} {}^{g_j h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})}} \tau_{k_{\ell j}}(h_{i_{\ell j}}^{(k_{\ell j})-1}(g_j^{-1} g g_{j'}) h_{i_{\ell j'}}^{(k_{\ell j})}), \quad {}^\forall g \in G_{\widehat{f}_\ell A},$$

ここで $a = {}^{g_1}a_{\ell 1}^{-1} \, {}^{g_2}a_{\ell 2}^{-1} \cdots {}^{g_n}a_{\ell n}^{-1}$, により与えられる．したがって, 補題 2.3 および 命題 2.4 より, 主張を得る．□

定理 3.9 に関連する結果が [14] で与えられる．

4 モノミアル・バーンサイド環のテンソル誘導

$\Omega(G,A)^+$ を $\Omega(G,A)$ の部分集合 $\{\sum_{(U,\tau)\in\mathcal{R}(G,A)} \ell_{(U,\tau)}[(G/U)_\tau] \mid \ell_{(U,\tau)} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ の元からなる加法的半群とする．補題 2.8 より $\Omega(G,A)^+$ は乗法に関して閉じている．各 $H \leq G$ に対して, 写像 $\widehat{\mathrm{Map}}_H(G,-) : \Omega(H,A)^+ \to \Omega(G,A)$ を

$$[T] \mapsto [\widehat{\mathrm{Map}}_H(G,T)], \quad T \text{ は任意の } (H,A) \text{ 集合}$$

により定義する ([4, (80.42)] 参照)．補題 3.5 より, この写像は乗法的である．

B を零元をもつ加法的半群とし, E を加法群とする．任意の $c \in B$ および写像 $f : B \to E$ に対して, 写像 $D_c f : B \to E$ を

$$d \mapsto f(c+d) - f(d), \quad {}^\forall d \in B$$

により定義する．写像 $f : B \to E$ が n 次の代数的写像であるとは, n が

$$D_{c_1} D_{c_2} \cdots D_{c_{n+1}} f = 0, \quad {}^\forall c_1, c_2, \ldots, c_{n+1} \in B$$

となる最小の整数であることをいう ([4, §80C] 参照)． $f : B \to E$ を n 次の代数的写像とし, $\overline{B}$ を B の元で生成される加法群とする．このとき f の拡張である写像 $\overline{f} : \overline{B} \to E$ がただ 1 つ存在し, $\overline{f}$ もまた n 次の代数的写像である ([6, Proposition 1.1], [4, (80.44) Theorem (*Dress*)] 参照)．また, $\overline{B}$ および E が可換環であり, B が乗法に関して閉じているとき, 写像 $f : B \to E$ が乗法的ならば, その $\overline{B}$ への拡張 $\overline{f} : \overline{B} \to E$ もまた乗法的である ([4, (80.47) Theorem] 参照)．

命題 4.1 ([13]) 各 $H \leq G$ に対して $\widehat{\mathrm{Map}}_H(G,-) : \Omega(H,A)^+ \to \Omega(G,A)$ は $|G:H|$ 次の代数的写像である．

この命題は [4, (80.43) Proposition (*Dress*)] の一般化である．補題 3.5, 命題 4.1, および [4, (80.47) Theorem] より, [4, (80.48) Theorem (*Dress*)] の一般化を得る．

命題 4.2 各 $H \leq G$ に対して $\widehat{\mathrm{Map}}_H(G,-)$ を拡張するただ 1 つの乗法的写像

$$\overline{\mathrm{Map}}_H(G,-) : \Omega(H,A) \to \Omega(G,A), \quad x \mapsto \overline{\mathrm{Map}}_H(G,x)$$

が存在する．さらに, この写像は $|G:H|$ 次の代数的写像である．

命題 4.2 の乗法的写像は $A = \{\epsilon_A\}$ の場合に [6, §4] で得られた．命題 3.6 は次のマッキー分解公式に拡張される ([15, §3(G.5)], [1, Proposition 9.5] 参照)．

命題 4.3 $H, K \leq G$, $x \in \Omega(H,A)$ とするとき

$$\mathrm{res}^G_K(\overline{\mathrm{Map}}_H(G,x)) = \prod_{KgH \in K\backslash G/H} \overline{\mathrm{Map}}_{K\cap {}^gH}(K, \mathrm{res}^{{}^gH}_{K\cap {}^gH} \circ \mathrm{con}^g_H(x))$$

が成り立つ．

5　モノミアル・バーンサイド環の基本定理

各 $H \leq G$ に対して, 環準同型 $\mathrm{con}_H^g : \mathbb{Z}H^1(H, A) \to \mathbb{Z}H^1({}^gH, A)$ を

$$\sigma \mapsto \overline{g\sigma}, \quad {}^\forall\sigma \in H^1(H, A), \ {}^\forall g \in G$$

により定義する．ここで $\mathbb{Z}H^1(H, A)$ は $\mathbb{Z}$ 係数の群環を表す．環 $\mho(G, A)$ を

$$\mho(G, A) = \left\{ (x_H)_{H \leq G} \in \prod_{H \leq G} \mathbb{Z}H^1(H, A) \ \middle| \ \mathrm{con}_H^g(x_H) = x_{{}^gH}, \quad {}^\forall g \in G \right\}$$

により定義される環の直積 $\prod_{H \leq G} \mathbb{Z}H^1(H, A)$ の部分環とする．この環をモノミアル・バーンサイド環 $\Omega(G, A)$ のゴースト環と呼ぶ.

各 $K \leq H \leq G$ に対して, 環準同型 $\mathrm{res}_K^H : \mathbb{Z}H^1(H, A) \to \mathbb{Z}H^1(K, A)$ を

$$\sigma \mapsto \overline{\sigma|_K}, \quad {}^\forall\sigma \in H^1(H, A)$$

により定義し, $\Omega(G, A)$ から $\mho(G, A)$ への加法的写像 $\rho : \Omega(G, A) \to \mho(G, A)$ を

$$[(G/U)_\tau] \mapsto \left(\sum_{gU \in G/U, \, H \leq {}^gU} \mathrm{res}_H^{{}^gU} \circ \mathrm{con}_U^g(\tau) \right)_{H \leq G}, \quad {}^\forall(U, \tau) \in \mathcal{R}(G, A)$$

により定める．このとき ρ は環準同形であり ([7, 2.4, 2.5] 参照), さらに単射である ([7, Theorem 1] 参照). 次に, 加法群 $\widetilde{\Omega}(G, A)$ を

$$\widetilde{\Omega}(G, A) = \prod_{(K, \nu) \in \mathcal{R}(G, A)} \mathbb{Z}$$

により定義する．また, 加法的写像 $\varphi : \Omega(G, A) \to \widetilde{\Omega}(G, A)$ を

$$\varphi([(G/U)_\tau]) = (|\{gU \in G/U \mid K \leq {}^gU, \, \nu = \mathrm{res}_K^{{}^gU} \circ \mathrm{con}_U^g(\tau)\}|)_{(K, \nu) \in \mathcal{R}(G, A)}$$

により定義し, バーンサイド準同形と呼ぶ．このとき, 次の図式を可換にする加法群の同型 $\kappa : \widetilde{\Omega}(G, A) \xrightarrow{\sim} \mho(G, A)$ が存在し, φ は単射となっている.

$$\begin{tikzcd}
\Omega(G, A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\rho"'] & \widetilde{\Omega}(G, A) \arrow[d, "\kappa"] \\
 & \mho(G, A)
\end{tikzcd}$$

各 $(U,\tau) \in \mathcal{H}(G,A)$ に対して

$$N_G(U,\tau) = \{g \in N_G(U) \mid \mathrm{con}_U^g(\tau) = \tau\}, \quad W_G(U,\tau) = N_G(U,\tau)/U$$

とおき, 加法群 $\mathrm{Obs}(G,A)$ を

$$\mathrm{Obs}(G,A) = \prod_{(U,\tau)\in\mathcal{R}(G,A)} \mathbb{Z}/|W_G(U,\tau)|\mathbb{Z}$$

により定義する. 各 $(U,\tau) \in \mathcal{H}(G,A)$ および各 $g \in N_G(U,\tau)$ に対して

$$H_\tau^1(\langle g\rangle U, A) = \{\nu \in H^1(\langle g\rangle U, A) \mid \tau = \mathrm{res}_U^{\langle g\rangle U}(\nu)\}$$

とおく. 加法的写像 $\psi : \widetilde{\Omega}(G,A) \to \mathrm{Obs}(G,A)$ を

$$(y_{(K,\nu)})_{(K,\nu)\in\mathcal{R}(G,A)} \mapsto (z_{(U,\tau)} \bmod |W_G(U,\tau)|)_{(U,\tau)\in\mathcal{R}(G,A)},$$

ここで $(K,\nu) \in \mathcal{R}(G,A)$ が (H,σ) を含む G 軌道の代表ならば $y_{(H,\sigma)} = y_{(K,\nu)}$ として

$$z_{(U,\tau)} = \sum_{gU\in W_G(U,\tau),\, \nu\in H_\tau^1(\langle g\rangle U,A)} y_{(\langle g\rangle U,\nu)}$$

により定義し, コーシー・フロベニウス準同形と呼ぶ.

次の定理は, バーンサイド環の基本定理 ([5, Proposition 1.3.5], [15, Lemma 2.1] 参照) と同様に, コーシー・フロベニウスの定理 [16, 2.7 Lemma (Cauchy-Frobenius)] を用いて証明され, モノミアル・バーンサイド環の基本定理と呼ばれる.

定理 5.1 ([13]) 加法群の列

$$0 \longrightarrow \Omega(G,A) \xrightarrow{\varphi} \widetilde{\Omega}(G,A) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Obs}(G,A) \longrightarrow 0$$

は完全である.

6 バーンサイド環の一般化

モノイドの族 $M(H)$, $H \le G$ とモノイド準同型の族

$$\begin{aligned} &(\text{共役写像}) \quad \mathrm{con}_H^g : M(H) \to M({}^gH), \quad H \le G,\ g \in G, \\ &(\text{制限写像}) \quad \mathrm{res}_K^H : M(H) \to M(K), \quad K \le H \le G \end{aligned}$$

の組 $M = (M, \mathrm{con}, \mathrm{res})$ が 次の条件を満たすとする:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{M.1})\ \mathrm{con}_{{}^rH}^g \circ \mathrm{con}_H^r = \mathrm{con}_H^{gr}, \quad \mathrm{con}_H^h = \mathrm{id}_{M(H)}, \\ &(\mathrm{M.2})\ \mathrm{res}_L^K \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_L^H, \quad \mathrm{res}_H^H = \mathrm{id}_{M(H)}, \\ &(\mathrm{M.3})\ \mathrm{con}_K^g \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_{{}^gK}^{{}^gH} \circ \mathrm{con}_H^g, \end{aligned}$$

ここで $L \leq K \leq H \leq G$, $g, r \in G$ 及び $h \in H$ である. 以下 $H \leq G$ とし,

$$\widetilde{M}(H) = \dot{\bigcup_{K \leq H}} M(K), \qquad \mathcal{S}(H, M) = \{(K, s) \mid K \leq H,\ s \in M(K)\}$$

とおく. このとき $\widetilde{M}(H)$ は作用 ${}^h s = \mathrm{con}_K^h(s)$, ${}^\forall h \in H$, ${}^\forall(K, s) \in \mathcal{S}(H, M)$ により左 H 集合となる. 任意の有限左 H 集合 J, J_0 に対して J_0 から J への H 写像全体の集合を $\mathrm{Map}_H(J_0, J)$ で表す. 有限左 H 集合のカテゴリー H-**set** からモノイドのカテゴリー **Mon** への反変関手 $T = T_H^M : H\text{-}\mathbf{set} \to \mathbf{Mon}$ を, 各 $J \in H$-**set** に対して

$$T(J) = \{\pi \in \mathrm{Map}_H(J, \widetilde{M}(H)) \mid \pi(x) \in M(H_x),\ {}^\forall x \in J\},$$

ここで H_x は H における x の安定化群, により定義する. J, $J_0 \in H$-**set** と H 写像 $\lambda : J_0 \to J$ に対して **Mon** におけるモルフィズム $T(\lambda) : T(J) \to T(J_0)$ は

$$T(\lambda)(\pi) : J_0 \to \widetilde{M}(H), \quad x \mapsto \mathrm{res}_{H_x}^{H_{\lambda(x)}}(\pi(\lambda(x))), \quad {}^\forall \pi \in T(J)$$

により定義される. $J \in H$-**set** と $T(J)$ の元 π の組 (J, π) は T の要素と呼ばれる. T の要素間のモルフィズム $\lambda : (J_0, \pi_0) \to (J, \pi)$ は $T(\lambda)(\pi) = \pi_0$ となる H 写像 $\lambda : J_0 \to J$ として定められる. T の要素 (J, π) を含む T の要素の同型類を $[J, \pi]$ で表す. 各 $(K, s) \in \mathcal{S}(H, M)$ に対して, H 写像 $\pi_s : H/K \to \widetilde{M}(H)$ を

$$\pi_s(hK) = {}^h s \in M({}^h K), \quad {}^\forall h \in H$$

により定める. 集合 $\mathcal{S}(H, M)$ 上の左 H 作用を $h.(K, s) = ({}^h K, {}^h s)$, ${}^\forall h \in H$ により定め, $\mathcal{R}(H, M)$ を H 軌道の完全代表系とする. (K, s), $(U, t) \in \mathcal{S}(H, M)$ が同じ H 軌道に含まれるための必要十分条件は $[H/K, \pi_s] = [H/U, \pi_t]$ となっていることである. ここで M バーンサイド環 $\Omega(H, M)$ を自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $\bigoplus_{(K,s) \in \mathcal{R}(H,M)} \mathbb{Z}[H/K, \pi_s]$ において

$$[H/K, \pi_s] \cdot [H/U, \pi_t] = \sum_{KhU \in K \backslash H/U} \left[H/(K \cap {}^h U), \pi_{\mathrm{res}_{K \cap {}^h U}^K(s) \cdot \mathrm{res}_{K \cap {}^h U}^{{}^h U}({}^h t)} \right]$$

により乗法が定まる環として定義する ([11] 参照). 例として, $M(K) = H^1(K, A)$, ${}^\forall K \leq H$ の場合, $\Omega(H, M)$ はモノミアル・バーンサイド環 $\Omega(H, A)$ と同型である.

参考文献

[1] L. Barker, Fibred permutation sets and the idempotents and units of monomial Burnside rings, J. Algebra **281** (2004), 535–566.

[2] R. Boltje, A canonical Brauer induction formula, Astérisque, **181–182** (1990), 31–59.

[3] R. Boltje, A general theory of canonical induction formulae, J. Algebra **206** (1998), 293–343.

[4] C. W. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation Theory, Vol. I, II, Wiley-Interscience, New York, 1981, 1987.

[5] T. tom Dieck, Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, 766, Springer, Berlin, 1979.

[6] A. Dress, Operations in representation rings, *in* "Representation theory of finite groups and related topics," (Madison, Wis., 1970), 39–45, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

[7] A. Dress, The ring of monomial representations I. Structure theory, J. Algebra, **18** (1971), 137–157.

[8] B. Fotsing and B. Külshammer, Modular species and prime ideals for the ring of monomial representations of a finite group, Comm. Algebra **33** (2005), 3667–3677.

[9] M. Müller, On the isomorphism problem for the ring of monomial representations of a finite group, J. Algebra **333** (2011), 427–457.

[10] M. Müller, Isomorphic rings of monomial representations, J. Algebra **367** (2012), 105–119.

[11] F. Oda, Y. Takegahara, and T. Yoshida, The lattice Burnside rings, arXiv:1904.04979.

[12] Y. Takegahara, Multiple Burnside rings and Brauer induction formulae, J. Algebra **324** (2010), 1656–1686.

[13] Y. Takegahara, Multiplicative induction and units for the ring of monomial representations, submitted.

[14] Y. Takegahara, Tensor induction for M-Burnside ring functors, in preparation.

[15] T. Yoshida, On the unit groups of Burnside rings, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 31–64.

[16] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.